

Estabilización de sistemas de primer orden inestables con retardo que contienen un cero de fase mínima.

C. D. Vázquez Rosas, B. del Muro Cuéllar.

Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, Unidad Culhuacán, Instituto Politécnico Nacional, Santa Ana 1000 México D.F, 04430

E-mail: carlos_daniel_vaz@hotmail.com, bdelmuro@yahoo.com

Resumen- En el presente trabajo se aborda el problema de estabilización de sistemas lineales invariantes en el tiempo, inestables, de primer orden con retardo en el lazo directo que contienen un cero de fase mínima. Para afrontar este problema se propone como estrategia de control una retroalimentación estática de salida y se presentan las condiciones necesarias y suficientes con base a la posición del polo, del cero y del tamaño de retardo para que el sistema pueda ser estabilizado.

Palabras clave: Retroalimentación, retardo, inestable, cero, fase mínima.

I. INTRODUCCIÓN.

Los retardos se encuentran dentro de cualquier sistema físico debido al transporte de energía, de material, de información, entre otros. Algunos ejemplos de sistemas que contienen retardos significativos son sistemas biológicos, los retardos de transporte de fluido o cuando el retardo se introduce en el propio diseño del sistema de control como sucede al ejecutar el algoritmo de control en un ordenador. Los sistemas con retardo se pueden modelar de diferentes formas, por ejemplo, a partir de ecuaciones diferenciales funcionales [1], con aproximaciones sobre funciones de transferencia (a través del operador e^{-Ts}), aproximaciones algebraicas [2] [3], representaciones polinomiales sobre anillos [4] entre otras.

La principal limitación de un retardo en un sistema de control, es que generan un decremento de la fase, lo cual trae consigo, un margen menor de ganancias que pueden estabilizar el sistema con respecto a uno libre de retardo, generando que, algunos sistemas estables, al introducir el retardo se inestabilicen. Al tener un sistema de control con retardo en lazo cerrado, modelarlo con una función de transferencia utilizando el operador e^{-Ts} y cerrar el lazo de control, la ecuación característica del sistema posee un número infinito de polos, por lo tanto, las estrategias convencionales de control son difíciles de aplicar y se ven reducidas en efectividad.

Diversas estrategias de control se han abordado para sistemas de control con retardo, una de ellas es la aproximación de Padé, la cual se puede utilizar en el análisis del sistema en lazo cerrado. Dicha estrategia, aproxima el retardo a una función de transferencia racional [5], permitiendo que se puedan utilizar las estrategias de control para sistemas libres de retardos tales como el lugar geométrico de las raíces o el criterio de estabilidad de

Routh-Hurwitz. La mayor complicación que presenta esta estrategia es que, estas aproximaciones hacen muy complejo al sistema aumentando polos y ceros dependiendo del grado de la aproximación.

Una forma muy popular es la de usar predicciones del efecto del retardo en el sistema, siendo el método más conocido el predictor de Smith (SP). Esta estrategia se basa en contrarrestar los efectos del tiempo de retardo por medio de estrategias dedicadas a estimar los efectos de las entradas presentes sobre las salidas futuras [6]. La desventaja de esta técnica, es que, no tiene un paso de estabilización, lo cual no permite su uso en plantas inestables a lazo abierto además de que el esquema es muy sensible contra errores de modelado [7]. Para afrontar estas limitaciones, diversos autores han propuesto diferentes modificaciones a la estructura original propuesta por Smith, con el fin de que pueda utilizarse en plantas inestables [8] o que se pueda utilizar en sistemas inestables que tengan grandes retardos [9]. La estructura del predictor de Smith se muestra en la figura 1.

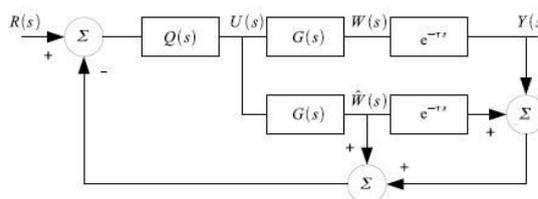


Figura 1. Diagrama a bloques del predictor de Smith.

Otra alternativa para caracterizar el retardo, es hacerlo en el dominio de la frecuencia. En el dominio de la frecuencia, el retardo es representado como un decremento de la fase que aumenta conforme la frecuencia se hace más grande. La magnitud no es afectada por el retardo, ya que la magnitud del retardo es unitaria para cualquier frecuencia. Métodos de análisis en el dominio de la frecuencia como el diagrama de Bode y el diagrama de Nyquist, son muy útiles para el análisis de sistemas de inestables con retardo, ya que de manera gráfica se puede analizar la estabilidad del sistema. El criterio de estabilidad de Bode se puede aplicar a sistemas inestables si es que se conoce de donde provienen las características de fase no mínima en el sistema [10] [11].

Diversos trabajos han abordado la problemática de sistemas de primer orden inestables con retardo, donde se pueden encontrar diferentes estrategias de control, tal es el caso de [12] que propone como estrategia de control el uso de un controlador PID. El uso de estrategias basadas en un observador y para asegurar que el sistema siga referencias y rechace perturbaciones [13].

Este trabajo se enfoca al problema de estabilización de sistemas de primer orden con retardo que tienen un cero de fase mínima, mostrando las condiciones necesarias y suficientes para garantizar la estabilidad del sistema en lazo cerrado. Cabe destacar que ninguno de los trabajos previos sobre sistemas de primer orden inestables, abordan el caso que exista un cero de fase mínima en la dinámica del sistema.

El trabajo se organiza de la siguiente forma; en la Sección II se presentan la clase de sistemas considerados. En la Sección III se presentan los resultados principales presentando la estrategia de control propuesta y las condiciones necesarias y suficientes para la estabilidad, en la Sección IV se muestra el desempeño de la estrategia de control, mediante algunas simulaciones digitales, finalmente en la Sección V se presentan las conclusiones.

II. SISTEMAS UTILIZADOS.

Considere un sistema lineal con una entrada, una salida y un retardo de tiempo a la entrada.

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s+b}{s-a} e^{-\tau s} \quad (1)$$

Donde $U(s)$ y $Y(s)$ corresponden a las señales de entrada y salida respectivamente, $\tau > 0$ es el tiempo de retardo conocido, $a > 0$ y $b > 0$ son el valor del polo y del cero respectivamente.

Considere el sistema con retardo descrito en la Ec (1) utilizando una retroalimentación estática de salida:

$$U(s) = [R(s) - Y(s)]k \quad (2)$$

Donde $R(s)$ es una entrada de referencia y el término "k" es la ganancia. Lo cual produce el siguiente sistema a lazo cerrado:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{k(s+b)e^{-\tau s}}{s-a+k(s+b)e^{-\tau s}} \quad (3)$$

Se puede notar que el término $e^{-\tau s}$ está localizado en la ecuación característica del sistema dificultando su análisis de estabilidad. En este trabajo se considera la noción clásica de estabilidad relacionada con la función de transferencia, donde la estabilidad depende de la posición de los polos en lazo cerrado del sistema.

III. RESULTADOS PRINCIPALES.

La estrategia de control propuesta en este trabajo consiste en una retroalimentación estática de salida. A continuación se presentan las condiciones necesarias y suficientes para la existencia de una ganancia que a lazo cerrado pueda estabilizar el sistema.

Lema 1. Si $b < a$ entonces no existe una ganancia proporcional "k" tal que el sistema en lazo cerrado dado por la Ec (3) sea estable.

Demostración: Considere el sistema de la Ec (1) en el dominio de la frecuencia. Se analiza el lugar geométrico de los vectores $|G(j\omega)| \angle G(j\omega)$ para efectuar el criterio de estabilidad de Nyquist. $|G(j\omega)|$ corresponde a la magnitud del sistema y $\angle G(j\omega)$ corresponde al ángulo de fase del sistema. Primero se obtiene la magnitud del sistema:

$$|G(j\omega)| = \sqrt{(X(\omega))^2 + (Y(\omega))^2} \quad (4)$$

Donde $X(\omega)$ y $Y(\omega)$ es la parte real y la parte imaginaria del sistema respectivamente y $G(j\omega)$ es la función de transferencia sinusoidal. Para obtener la magnitud del sistema, se factoriza $G(s)$ en funciones de transferencia sencillas, se obtiene la magnitud de cada una de sus partes y el producto de éstas es la magnitud del sistema. De lo cual se obtiene:

$$|G(j\omega)| = \frac{\sqrt{b^2 + \omega^2}}{\sqrt{a^2 + \omega^2}} \quad (5)$$

Ahora se analiza cómo se comporta la fase del sistema. Considere el ángulo en función de la frecuencia del sistema en la Ec (1):

$$\angle G(j\omega) = \angle \frac{k(s+b)}{(s-a)} e^{-s\tau} = \angle(s+b) + \angle \frac{1}{(s-a)} + \angle e^{-s\tau} \quad (6)$$

Partiendo de la Ec (6) es fácil ver que, para obtener la condición de ángulo, se puede obtener la contribución de ángulo de cada uno de los elementos del sistema y después sumarlos. Para la obtención del ángulo de $G(j\omega)$ se tiene:

$$\angle G(j\omega) = \tan^{-1} \left[\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} \right] \quad (7)$$

Es importante tomar en cuenta que los polos en el semiplano derecho contribuyen con -180° a la fase en estado estacionario. El ángulo en función de la frecuencia está dado por:

$$\angle G(j\omega) = -(180 - \tan^{-1} \frac{\omega}{a}) + \tan^{-1} \frac{\omega}{b} - \omega\tau \quad (8)$$

Se analiza cómo se comporta el sistema variando la frecuencia de $-\infty$ a ∞ para aplicar el criterio de estabilidad de Nyquist. El criterio de estabilidad de Nyquist establece que, cuando el lazo de control se cierra con una ganancia proporcional "k" el sistema será estable si $0 = N + P$, donde P es el número de polos en el semiplano derecho del plano "s" y N es el número de rodeos en sentido horario al punto -1 (Valores negativos de N, representan rodeos en sentido anti-horario). Para el sistema con un polo inestable, la condición para la estabilidad es que exista un rodeo en sentido anti-horario al punto -1. El diagrama de Nyquist se obtiene al graficar el lugar geométrico de los vectores $|G(j\omega)| \angle G(j\omega)$, conforme varíe la frecuencia:

$$\frac{\sqrt{b^2 + w^2}}{\sqrt{a^2 + w^2}} \angle - (180 - \tan^{-1} \frac{w}{a}) + \tan^{-1} \frac{w}{b} - wt \quad (9)$$

Cuando son frecuencias $w \gg a$ y $w \gg b$ el comportamiento del sistema será:

$$\cong 1 \angle - (180 - \tan^{-1} \frac{w}{a}) + \tan^{-1} \frac{w}{b} - wt \quad (10)$$

En altas frecuencias, el efecto del retardo en la fase, es que ésta disminuye de forma monótonica e indefinida, generando una serie de rodeos en sentido horario con un radio de valor ≈ 1 (valor de la magnitud de $G(jw)$) como se puede ver en la figura 2.

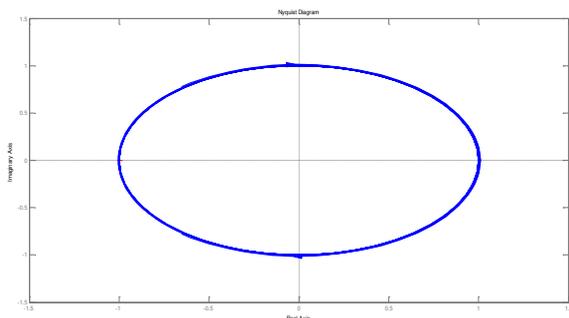


Figura 2. Diagrama de Nyquist del sistema a altas frecuencias

Cuando son frecuencias $w \approx 0$ su comportamiento será:

$$\frac{b}{a} \angle -180 + \frac{w}{a} + \frac{w}{b} \quad (11)$$

A bajas frecuencias, la fase comienza en -180 y dependiendo el valor del retardo la fase aumentará o disminuirá. Cualquier rodeo generado tendrá una magnitud de $G(jw)$ menor que uno (dado que $b < a$, por lo tanto $\frac{b}{a} < 1$) independientemente del valor del retardo, generando que, los rodeos existentes a bajas frecuencias, queden siempre dentro de los rodeos en sentido horario generados en altas frecuencias como se aprecia en la figura 3, ocasionando que no exista una “k” que pueda estabilizar el sistema.

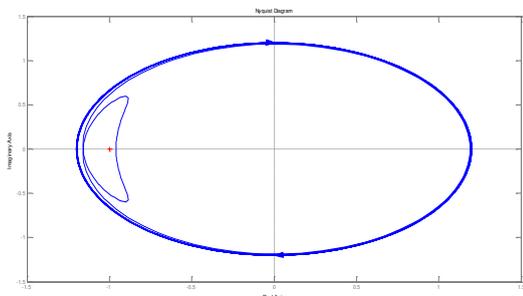


Figura 3. Diagrama de Nyquist del sistema.

En la figura 3 se puede apreciar que, el variar la ganancia no impediría que el rodeo en sentido anti-horario, quedara dentro de un infinito de rodeos en sentido horario

ya que, la magnitud de éste infinito de rodeos, también variaría al cambiar la ganancia.

Teorema 1: Sea $b > a$. Entonces se cumple que:

- 1) Si $0 < \tau < \frac{1}{a}$ entonces $\exists k$ que estabiliza el sistema (3) $\forall b$
- 2) Si $\frac{1}{a} < \tau < \frac{2}{a}$ entonces $\exists k$ que estabiliza el sistema $\Rightarrow b < \frac{1}{\tau - \frac{1}{a}}$
- 3) Si $\tau > \frac{2}{a}$ entonces no existe una ganancia proporcional “k” tal que el sistema en lazo cerrado dado por (3) sea estable.

Demostración: A partir de la Ec (11) la magnitud del vector $|G(jw)|$ será mayor a uno (dado que $b > a$, por lo tanto $\frac{b}{a} > 1$), así que, si el retardo está dentro de los parámetros descritos en el Teorema 1, existirá un rodeo anti-horario que no esté dentro de la serie de rodeos en sentido horario que se generan a altas frecuencias con magnitud $\cong 1$ garantizando que exista una ganancia que estabilice al sistema como se puede apreciar en la figura 4.

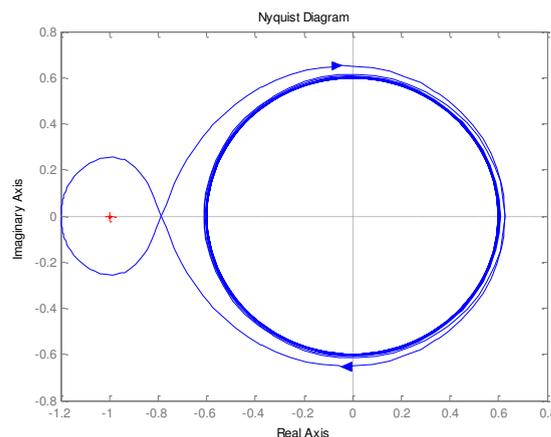


Figura 4. Diagrama de Nyquist del sistema cumpliendo las condiciones descritas en el teorema 1.

1) Considere la condición de fase obtenida en la Ec (8). La condición necesaria para la estabilidad es que, la fase tenga (para alguna frecuencia) un valor superior a -180° , con lo cual, se asegura un rodeo anti-horario, es decir:

$$\angle G(jw) > -180 \quad (12)$$

Para sacar conclusiones sobre el sistema, se efectúa una aproximación lineal local a partir de una serie de Taylor para los términos que contengan \tan^{-1} y ver cómo se comporta a valores muy pequeños del argumento (teniendo frecuencias muy bajas).

$$f(\theta) \cong f(\theta_0) + f'(\theta_0)(\theta - \theta_0) \quad (13)$$

Donde $f(\theta) = \tan^{-1}(\theta)$ y $\theta_0 = 0$ Obteniendo:

$$f(\theta) = \tan^{-1}(\theta) \cong \theta \quad (14)$$

Sustituyendo la Ec (12) y (14) en la Ec (8) se tiene:

$$-180 < -180 + \frac{w}{a} + \frac{w}{b} - wt \quad (15)$$

Al multiplicar por el inverso de la frecuencia w , es fácil obtener la condición de retardo del sistema:

$$\tau < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \quad (16)$$

De ésta, se desprende la siguiente condición:

$$\frac{1}{b} < \tau - \frac{1}{a} \quad (17)$$

De la cual se observa que, cuando $\tau < \frac{1}{a}$, la condición se cumplirá sin importar qué tan grande sea el valor de “b”, porque siempre dará un valor positivo, mientras que el otro lado de la desigualdad siempre tendrá un valor negativo.

2) A partir de la Ec (17) se concluye que, existen valores de “b” en los cuales no se cumpliría la condición dependiendo del valor de “ τ ”. Para valores de $\tau > \frac{1}{a}$, y de acuerdo con la Ec (17) se observa que, para que se cumpla la igualdad, existe una restricción para valores de “b”, por lo tanto tendría que estar acotado para: $b < \frac{1}{\tau - \frac{1}{a}}$

3) Dada la condición $b > a$, el valor mínimo de “b” antes de que en el sistema no exista una ganancia “k” que establezca al sistema es $b = a$. Bajo esta condición, el tiempo máximo de retardo que se puede tener considerando el sistema dado en la Ec (1) estaría dado por:

$$\tau < \frac{1}{a} + \frac{1}{a} = \frac{2}{a} \quad (18)$$

IV. RESULTADOS EN SIMULACIÓN.

Ejemplo 1. Considere un sistema de primer orden inestable, con retardo y con un cero de fase mínima, cuya función de transferencia es:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s + 1.5}{s - 1} e^{-1.5s} \quad (19)$$

Donde los parámetros del sistema son: $a=1$, $b=1.5$ y $\tau=1.5$. Es claro que el sistema cumple con las condiciones necesarias y suficientes expuestas en el Teorema 1 para que pueda ser estabilizado con la estrategia de control propuesta, es decir: $b > a$ y $\tau = 1.5 < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1.66$. Se aplica una retroalimentación estática de la salida con un valor de ganancia $k=0.7$. El valor de la ganancia se obtiene mediante un análisis en el dominio de la frecuencia.

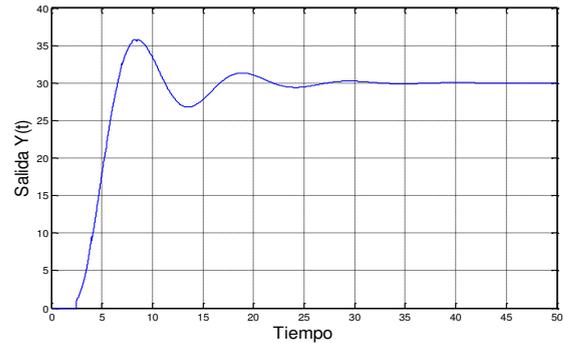


Figura 5. Respuesta de salida cumpliendo las condiciones descritas en el teorema 1. Ejemplo 1.

V. CONCLUSIONES.

Los sistemas con retardo de tiempo, representan un problema de control difícil de afrontar más aún si éstos son inestables. En este trabajo se presentan de manera explícita, las condiciones bajo las cuales existe una retroalimentación estática de salida que pueda estabilizar un sistema de primer orden, con retardo, inestable, que contenga un cero de fase mínima con base en los parámetros del sistema. Demostrando que, si el cero del sistema se encuentra más cercano al origen que el polo inestable y si existe un retardo de cualquier valor, no existe una ganancia “k” que a lazo cerrado pueda estabilizar el sistema.

REFERENCIAS.

- [1] Hale, Jack K. and Sjoerd M. Verduyn Lunel. Introduction to Functional Differential Equations, volume 99. Applied Mathematical Sciences. Springer-Verlag, 1993
- [2] Brethé, D. and Loiseau, J. J. An effective algorithm for finite spectrum assignment of single-input systems with delays. Mathematics in computers and simulation, 1998
- [3] Kamen E.W and Khargonekar P.P. and A. Tannenbaum. Proper stable bezout factorizations and feedback control of linear time delay systems. Int. J. Contr., Vol. 43, No. 3, 837-857, 1986.
- [4] Morse A. S., Ring models for delay-differential systems. Automatica, 1976
- [5] Niculescu S.-I., Delay Effects on Stability: A Robust Control Approach. Springer, 2001
- [6] Smith O. J. M., Close Control of Loops with Dead Time. Chem. Eng. Prog., 1957.
- [7] Palmor Z. J., Time delay compensation smith predictor and its modifications. The control Handbook, 1996.
- [8] Liu T., Cai Y. Z., Gu D. Y., Zhang W. D. New modified Smith Predictor scheme for integrating and unstable processes with time delay. IEE Proceedings - Control Theory and Applications 152(2), 238-246, 2005

[9] Normey J.E., Camacho E.F. A unified approach to design dead-time compensators for stable plants and integrative processes with dead-time. 40th. IEEE Conference On Decision and Control, 2267-2272, 2001

[10] Shinnars S. M. Modern control system theory and design, Hardcover, 1998

[11] Corriou J.P., Process Control: Theory and applications, Springer, 2004

[12] Guillermo J. Silva, A. D. and Bhattacharyya, S. 'New results on the synthesis of pid controllers', IEEE TRANSACTIONS ON AUTOMATIC CONTROL 47(2), 241-252., 2002

[13] Márquez, J., Muro, B. D., Velasco, M. and Alvarez, J. 'Control Based in an Observer Scheme for First-Order Systems with Delay', Revista Mexicana de Ingeniería Química 9.2010